Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου

Για την άσκηση (α) στο προηγούμενο μάθημα:

Επίσης, στον κύκλο $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=r^2\}$

δίνουμε την παραμετρικοποίηση

$\gamma_2(t) = (r\cos(t^2), r\sin(t^2))$, $t\in[0,\sqrt{2\pi}]$

(να προσεχθεί ότι $C=\gamma([0,2\pi])=\gamma^-([0,2\pi])=\gamma_2([0,\sqrt{2\pi}])$ και ότι όλες αυτές οι παραμετρικές καμπύλες μετασχηματίζονται μεταξύ τους με C^1 παραμετρ. μετασχηματισμούς. (με τον μετασχηματισμό από την γ στην γ_2 να διατηρεί προσανατολισμό γιατί $(t^2)'=2t>0$ $\forall t\in[0,\sqrt{2\pi}]$)(ενώ από την γ στην γ' τον αντιστρέφει $\Pi(a+\beta-t)'=-1$))

Τότε έχουμε $\int_{\gamma_2} f\cdot dx = \int_0^{\sqrt{2\pi}} f(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt =$

$$= \int_0^{\sqrt{2\pi}} f(r\cos(t)^2, r\cdot\sin(t)^2)\cdot\gamma_2'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix}-r\sin(t^2)\\ r\cos(t^2)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2r\sin(t^2)\\ 2r\cos(t^2)\end{pmatrix}dt =$$

$$= 2r^2\int_0^{\sqrt{2\pi}} 1\,dt = 2r^2\cdot\pi$$

β) Έστω $\gamma(t)=(ct, dt, et)$, $t\in[a,\beta]$, $d,c,e\in\mathbb{R}$

$\gamma(t)=t\begin{pmatrix}c\\d\\e\end{pmatrix}$ πρόκειται γεωμετρικά για ένα διάνυσμα ή καλύτερα μια ευθεία με κατεύθυνση (συγκεκριμένη) εφόσον το $t\in[a,\beta]$

Έστω $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

$$\int_\gamma f\cdot d(x,y,z) = \int_a^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^\beta \gamma(t)\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^\beta t\begin{pmatrix}c\\d\\e\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\d\\e\end{pmatrix}dt = \|(c,d,e)\|^2\cdot\int_a^\beta t\,dt$$

ΑΣΚΗΣΗ

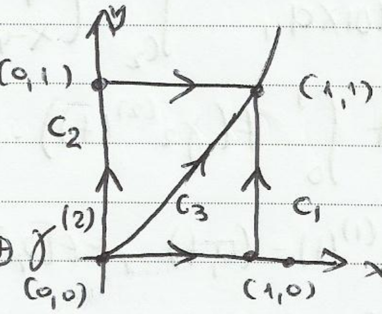
Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$\int_{C_i} y\,dx + (x-y)\,dy$ όπου C_i: πολυγωνική γραμμή

C_1 που συνδέει τα σημεία $(0,0), (1,0), (1,1)$ (με αυτή τη σειρά), C_2 που συνδέει τα σημεία $(0,0), (0,1), (1,1)$ και C_3 το τμήμα της παραβολής $y=x^2$ από το $(0,0)$ στο $(1,1)$

ΛΥΣΗ

$$\int_{C_i} \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} \cdot d(x,y)$$



Η $C_1 = \gamma([a,\beta])$ # με $\gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)}$

όπου $\gamma^{(1)}([0,1])$ η καμπύλη που ενώνει τα $(0,0)$, $(1,0)$ και $\gamma_2([0,1])$ η καμπύλη που ενώνει τα $(1,0)$ και $(1,1)$

$$\int_{C_1} f(x,y)\cdot d(x,y) = \int_{C_1^{(1)}} f(x,y)\,d(x,y) + \int_{C_1^{(2)}} f(x,y)\cdot d(x,y)$$

όπου $C_1^{(1)} = \gamma^{(1)}([a,\beta]) = \gamma^{(1)}([0,1])$ και όμοια για το $C_1^{(2)}$

Ερώτηση: Ποια παραμετρικοποίηση έχει ως εικόνα το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ $(0,0)$ και $(1,0)$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το ευθύγραμμο τμήμα αυτό είναι του με

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \gamma(t) = (t,0),\ t \in [0,1]\}$$

Άρα,

$$\int_{C_1} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\gamma_1^{(1)}} f(x,y)\cdot d(x,y) + \int_{\gamma_2^{(1)}} f(x,y)\,d(x,y)$$

όπου $\gamma_1^{(1)}(t) = (t,0),\ t \in [0,1]$

όπου $\gamma_1^{(2)}(t) = (1,t),\ t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(x,y)\cdot d(x,y) = \int_{C_1} \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 f(\gamma_1^{(1)}(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 (1-t)\, dt = \frac{1}{2}$$

Αντίστοιχα, $\int_{C_2} \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} d(x,y) = \int_0^1 f(\gamma_2^{(1)}(t)) \cdot \gamma_2^{(1)\prime}(t)\, dt$

$$+ \int_0^1 f(\gamma_2^{(2)}(t)) \cdot (\gamma_2^{(2)})'(t)\, dt$$

$\gamma_2^{(1)}(t) = (0,t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2^{(2)}(t) = (0,1) + t(1,0)$, $t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_{C_2} \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} d(x,y) = \dots = \frac{1}{2}$$

Τέλος, $C_3 = \{(x,y) : y = x^2,\ x \in [0,1]\} = \{(x,x^2) : x \in [0,1]\} =$
$= \{\gamma_3(t) = (t,t^2) : t \in [0,1]\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{C_3} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 f(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)\, dt = \dots = \frac{1}{2}$$

Άσκηση (για το σπίτι)
Υπολογίστε για τις ίδιες καμπύλες τα ολοκληρώματα
$$\int_{C_i} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y-x \end{pmatrix}}_{g(x,y)} d(x,y)$$

ΔΚ